КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Институт математики и механики

Кафедра общей математики

Д.Ф.Абзалилов

Математическое моделирование в социологии

Учебно-методическое пособие

Казань – 2012

Печатается по решению
учебно-методической комиссии
института математики и механики им. Н.И.Лобачевского
Казанского федерального университета
Протокол № 1 от 4 октября 2012 г.

Абзалилов Дамир Фаридович

Математическое моделирование в социологии. Учебно-методическое пособие для социологов – Казань: КФУ, 2012 г. – 48 с.

Методическое пособие основано на курсе лекций, которые читались Д.Ф.Абзалиловым студентам-социологам II курса факультета журналистики и социологии.

Содержание

Введение

В любой науке столько истины,
сколько в ней математики
Иммануил Кант

Данное методическое пособие представляет собой попытку познакомить социологов с математическим аппаратом и с современными методами решения социологических задач. Вот неполный перечень таких задач:

- обработка и анализ данных опросов и других социологических исследований
- построение математических моделей социальных процессов и явлений
- объяснение и предсказание социальных явлений

Математическое моделирование состоит в замене реального объекта его математической моделью с последующим изучением последней. Вид математической модели зависит как от природы реального объекта, так и задач исследования объекта и требуемой достоверности и точности решения этой задачи.

Многомерное шкалирование – математический инструментарий, предназначенный для обработки данных о отношениях между исследуемыми объектами с целью представления этих объектов в виде точек некоторого пространства восприятия. Этот метод позволяет выявить и интерпретировать латентные (т.е. скрытые и непосредственно не наблюдаемые) признаки, объясняющие связей между исследуемыми объектами. В пособии в качестве метода многомерного шкалирования рассмотрен метрический метод Торгерсона.

Другая задача обработки данных состоит в уменьшении размерность данных, потеряв наименьшее количество информации. Это позволяет, во-первых избавиться от "шума", т.е. части данных, которая содержит не полезную информацию, а погрешности и ошибки. Во-вторых, чем меньше размерность данных, тем легче их дальнейшее изучение и интерпретация. В качестве аппарата уменьшения размерности данных в пособии рассмотрен метод главных компонент.

Все процессы, развивающиеся во времени и имеющую в причинно-следственную связь моделируются с помощью дифференциальных уравнений (в случае, когда система описывается одной характеристикой) и систем дифференциальных уравнений (когда таких характеристик несколько). В качестве примера моделирования таких процессов в пособии рассмотрены несколько примеров роста численности популяции некоторой замкнутой экосистемы.

Глава I.

Математическое моделирование в социологии

§ 1. Векторы. Объекты и признаки.

1.1. Точки в n-мерном пространстве. В обычном трехмерном пространстве после введения системы координат каждой точке можно сопоставить тройку чисел $\{x, y, z\}$, называемых координатами этой точки. Соответствие точки и ее координат является взаимно однозначным, то есть зная положение точки можно определить ее координаты и, наоборот, по координатам можно установить положение. Множество вещественных чисел обозначается $\mathbb{R}$, множество всех точек пространства (или, множество троек чисел) – $\mathbb{R}^3$.

Элементами множества $\mathbb{R}^n$ являются упорядоченные наборы n чисел: $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. По аналогии с трехмерным пространством, можно считать, что этим наборам чисел соответствуют точки в некотором n-мерном пространстве.

1.2. Представление исследуемого объекта в виде точки. Объекты социологического исследования обладают рядом характерных признаков (будем считать, что таких признаков n). Эти признаки образуют так называемое n-мерное пространство восприятия. Каждому объекту можно поставить в соответствие n чисел, то есть дать количественную оценку объекта по каждому из признаков. Таким образом, каждый объект некоторого множества описывается набором из n чисел, и по сути, является точкой в пространстве $\mathbb{R}^n$.

В таблице 1 представлены три характерных признака ряда автомобилей.

Табл. 1. Исходные данные

	цена (руб.)	расход (л./100 км.)	разгон до 100 км./ч (с.)
1. Лада Калина	260 000	9.8	12.9
2. Renault Logan	370 000	10.0	11.5
3. Huyndai Getz	450 000	7.6	9.6
4. Toyota Prius	1 100 000	3.9	10.4
5. Mitsubishi Lancer	1 300 000	13.8	7.0

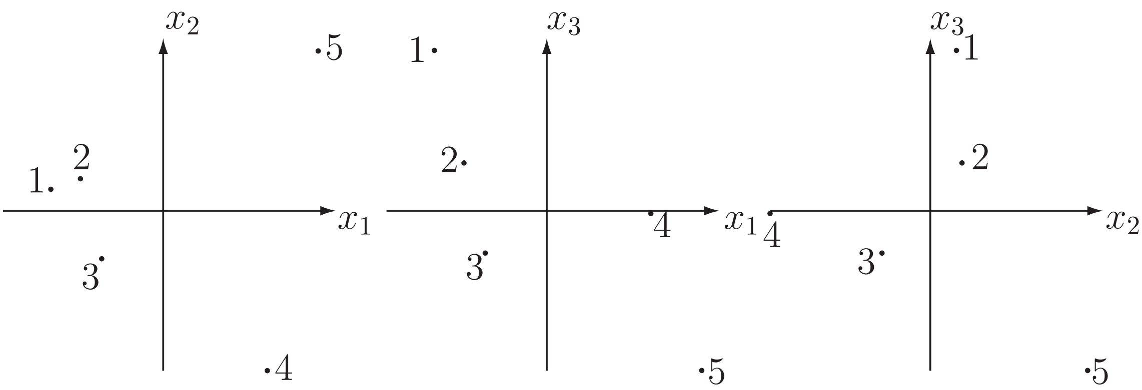
1.3. Шкалирование данных. Прежде чем анализировать данные, их необходимо нормализовать. Это нужно для того, чтобы уровнять вклад каждого признака. Для этого данные центрируют (вычитают из каждого признака среднее значение) и нормируют (делят на среднее квадратичное отклонение). В таблице 2 приведены нормализованные данные таблицы 1:

Табл. 2. Нормализованные данные

№	1	2	3
1	-1.05	0.24	1.53
2	-0.77	0.30	0.44
3	-0.58	-0.45	-0.40
4	0.96	-1.57	-0.04
5	1.44	1.48	-1.53

1.4. Графическое представление данных. Если объекты характеризуются лишь двумя признаками, их представляют графически в виде точек на плоскости. Каждая координатная ось этой плоскости соответствует одному признаку.

Если признаков больше двух, графическое представление объектов затруднительно. В этом случае обычно строят серию двумерных чертежей, по одному чертеже на каждую пару осей. Так, на рисунке 1 представлены чертежи, соответствующие объектам из таблицы 2.



1.5. Скалярное произведение векторов. Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\mathbf{b}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ называется число вычисляемое по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k. \tag{1.1}$$

Длина $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ равна квадратному корню свзана скалярного произведения

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}. \tag{1.2}$$

Угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{1.3}$$

Если для двух ненулевых векторов скалярное произведение равно нулю, то угол $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и такие векторы называют перпендикулярными или ортогональными.

В случае, когда для ненулевых векторов $\varphi = 0$ или π, векторы лежат на параллельных прямых и они называются коллинеарными. Такие векторы можно связать соотношением $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, где λ – постоянная.

1.6. Меры различия объектов. Мера различия δ_{ij} в пространстве восприятия – величина, определенная для пары $(i,\, j)$ объектов и показывающая, как сильно они различаются.

Аналогом меры различия в обычном геометрическом пространстве является понятие расстояния. Евклидово расстояние между точками $\mathbf{a}\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\mathbf{b}\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ вычисляется по теореме Пифагора

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}. \qquad (1.4)$$

Эта формула обобщена на случай n-мерного пространства.

Пространства, в которых расстояние между точками вычисляется по этой формуле называются евклидовыми. Понятие расстояния между точками может быть введено и по другому, например,

$$d_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{n} |a_k - b_k|$$

или

$$d_\infty(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \max_k |a_k - b_k|.$$

Так как точкам пространства соответствуют некоторые объекты, все эти формулы вычисления расстояний d можно считать мерой различия δ между объектами.

В таблице 3 приведены меры различия между объектами из таблицы 2, рассчитанные по формуле (1.4):

Табл. 3. Меры различия между объектами

№	1	2	3	4	5
1	0	1.13	2.10	3.13	4.14
2	1.13	0	1.14	2.59	3.19
3	2.10	1.14	0	1.94	3.01
4	3.13	2.59	1.94	0	3.43
5	4.14	3.19	3.01	3.43	0

1.7. Аксиомы расстояния. Формула вычисления расстояния между точками пространства не может быть произвольной. Эта должна удовлетворять следующим трем аксиомам расстояния:

1. Аксиома тождества: $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}$.
2. Аксиома симметрии: $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = d(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.
3. Неравенство треугольника: $d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b}) \geqslant d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Важным следствием, вытекающим из этих аксиом является то, что расстояние является неотрицательной величиной.

1.8. Выполнение аксиом в социологии. Все перечисленные аксиомы являются привычными и знакомыми каждому человеку. Поэтому трудно бывает представить, что они могут не выполняться. Но когда мы имеем дело не с обычным расстоянием, а с мерой различия и работаем не в привычном геометрическом пространстве, а в пространстве восприятия, такая возможность существует.

Рассмотрим следующий пример. Испытуемому предъявляют один за другим два сигнала из азбуки Морзе, а затем просят ответить, являются ли эти сигналы одним и тем же или разными сигналами. Всевозможные пары $(i,\, j)$ сигналов предъявляются одинаковое число раз.

Число предъявлений пар $(i,\ j)$ в которых испытуемый дал ответ "различны" можно рассматривать как меру различия между объектами i и j.

Ответ "различны" был дан при предъявлении двух сигналов азбуки Морзе "E" в 3% случаев, в при предъявлении двух сигналов "P" – в 17% случаев. Как мы видим, первая аксиома тождества нарушается.

Когда сигнал "U" следовал за "A", ответ различны встречался в 63% случаев, а когда сигнал "A" следовал за "U" – в 86%. Это можно интерпретировать как нарушение аксиомы симметрии.

Но самой "болезненной" аксиомой для социологов является третья аксиома, неравенство треугольника. Когда исследователь, опираясь на неформальные рассуждения, пытается выразить свое представление об расстояниях между объектами, он обычно интуитивно соблюдает первую и вторую аксиомы. А правило треугольника, как менее очевидное, им часто не учитывается. Поэтому нарушение третьей аксиомы является наиболее часто встречающимся примером некорректно выбранной меры различия в пространстве восприятия.

Если первые две аксиомы выполнены, но нарушается третья, то данные можно преобразовать следующим образом. Пусть

$$h = \max_{i,j,k} \left[\delta_{ij} - \delta_{ik} - \delta_{jk}\right].$$

После этого создаем новые меры различий по формуле

$$\widetilde{\delta}_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ \delta_{ij} + h, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.5}$$

Полученная таким образом мера различия $\widetilde{\delta}_{ij}$ будет удовлетворять всем трем аксиомам расстояния.

§ 2. Матрицы. Матрица объект–признак и матрица различий

2.1. Понятие матрицы. Матрица – двумерная таблица чисел. Количество строк m и столбцов n матрицы задают ее размер. Элементом a_{ij} матрицы A называется число, стоящее на пересечении i строки и j столбца.

Матрица называется *квадратной* если количество строк совпадает с количеством столбцов. Квадратная матрица, у которой элементы a_{ij} и a_{ji} равны, называется *симметричной*. Элементы a_{ii}, у которых номер строки совпадает с номером столбца, образуют *главную диагональ*. Матрица, у которой выше или ниже главной диагонали стоят нули, называется *треугольной*. Матрица, у которой вне главной главной диагонали стоят нули, называется *диагональной*. Диагональная матрица, у которой на главной диагонали расположены одни единицы, называется *единичной*. Для единичной матрицы в дальнейшем будем использовать обозначение E. Примеры матриц: A – симметричная, B – треугольная, D – диагональная, E – единичная:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 5 & 0 & -7 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Основные матричные операции. Для матриц определены следующие действия:

1. *Транспонирование.* Матрица $B = A^T$ размера $m \times n$ называет-

ся транспонированной для матрицы A размера $n \times m$, если ее элементы

$$b_{ij} = a_{ji} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

2. *Умножение на число.* Матрица $B = \lambda A$ называется матрицей A умноженной на число λ, если ее элементы

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

3. *Сложение и вычитание.* Матрица $C = A + B$ называется суммой матриц A и B, если ее элементы

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Аналогично вводится операция вычитания. Заметим, что эти операции сложения и вычитания определены лишь в случае, когда матрицы A и B имеют один размер.

4. *Матричное умножение.* Матрица $C = AB$ размера $m \times n$ называется произведением матрицы A размера $m \times l$ и матрицы B размера $l \times n$, если ее элементы

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj} \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,m}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Заметим, что операция умножения определена лишь в случае, когда количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй. В общем случае $AB \neq BA$, т.е. при матричном умножении матрицы нельзя менять местами.

5. *Аналог деления. Обратная матрица.* Операции деления для матриц не существует. Аналогом деления служит умножение на обратную матрицу. Матрица $B = A^{-1}$ называется *обратной* к матрице A, если

$$AB = BA = E.$$

Заметим, что вычисление обратной матрицы определено лишь для квадратных матриц, имеющих ненулевой определитель.

Основные свойства матричных операций:

1°	$A^{TT} = A,$	2°	$(A^{-1})^{-1} = A,$
3°	$A + B = B + A,$	4°	$AE = EA = A,$
5°	$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B,$	6°	$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$
7°	$A(BC) = (AB)C,$	8°	$A(B + C) = AB + AC,$
9°	$(AB)^T = B^T A^T,$	10°	$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$

2.3. Матрица объект признак и матрица различий. Таблицу 2 (стр. 7) называют матрицей объект–признак, в дальнейшем будем ее обозначать буквой X. Элемент x_{ij} содержит числовую характеристику i объекта по j признаку, эта матрица имеем размер $m \times n$, где m – число объектов, n – число признаков.

Таблицу 3 (стр. 10) называют матрицей различий, в дальнейшем будем ее обозначать буквой Δ. Эта матрица Δ является квадратной (ее размер $m \times m$). Элемент δ_{ij} содержит числовую характеристику различия между объектами i и j. Элементы, стоящие на главной диагонали Δ равны нулю (следствие аксиомы 1), а сама матрица является симметричной (следствие аксиомы 2).

По матрице X легко можно получить матрицу Δ. Вследствие формулы (1.4)

$$\delta_{ij} = d_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - x_{jk})^2}. \tag{2.1}$$

Обратная задача, т.е. задача нахождения матрицы X по матрице Δ является целью метода многомерного шкалирования, который будет рассмотрен в § 5.

Также введем матрицу Δ^* скалярных произведений, элементы которой вычисляются по формуле (1.1)

$$\delta^*_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} x_{jk}. \tag{2.2}$$

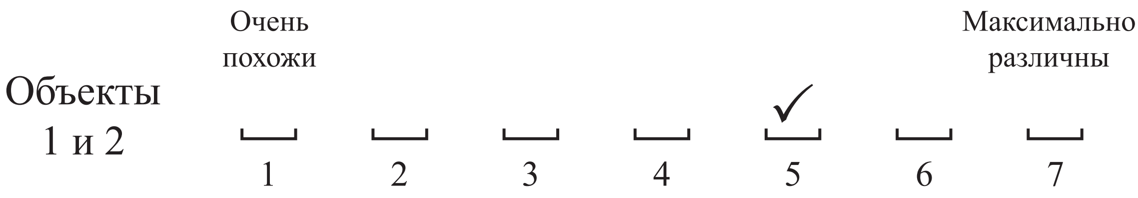
2.4. Экспериментальные методы получения матрицы различий. Для получения матрицы Δ необходимо провести попарное сравнение всех исследуемых объектов. Для m объектов таких пар будет $\frac{m(m-1)}{2}$. Различие между каждой парой объектов обычно оценивается путем усреднения оценок, полученных от разных испытуемых. Число усредняемых оценок должно быть не менее $\frac{40n}{m-1}$, где n – ожидаемое число признаков, характеризующих объекты группы. Таким образом, общее число оценок при проведении исследования должно быть не меньше чем $20nm$.

Экспериментатор должен решить, какой тип задания следует дать испытуемым. В существует 4 основных вида таких заданий: оценка величины различия, категоральная оценка, графическая оценка и категоральная сортировка.

В задании по *оценке величины различия* одна пара стимулов выбирается в качестве стандарта. Различие между этой парой считается равным 1 (или 100%). Стандартная пара выбирается таким образом, чтобы степень различия между ней и другими парами объектов были не слишком низкими и не слишком высокими. Задача испытуемого заключается в выборе для каждой пары объектов числа, показывающего степень отличия данной пары от стандартной.

Допустим, стандартной парой выбраны объекты 1 и 2, следовательно $\delta_{12} = 1$. Испытуемому предложено оценить различие между объектами 3 и 4. Если он считает, что объекты 3 и 4 в два раза более различны, чем объекты 1 и 2, то δ_{34} будет равна 2. Если испытуемый считает, что, например, различие между объектами 5 и 6 составляет половину различия между стандартной парой 1 и 2, то он должен приписать $\delta_{56} = 1/2$.

В задании по *категоральной оценке* испытуемому предъявляют пару стимулов следующим образом:



Испытуемому требуется указать, насколько различными он считает пару объектов и отметить соответствующую категорию на шкале оценок. Обычно каждой категории приписывается целое число; в показанном примере ответ получил оценку 5.

Метод *графической оценки* похож на метод категоральной оценки. В этом случае испытуемому пара объектов для оценки предоставляется в следующем виде:

Испытуемый должен, как показано выше, перечеркнуть шкалу в точке, расстояние от которой до левого края равно различию между оцениваемыми объектами.

Еще один метод получения категоральной оценки – *категоральная сортировка*. Для этого метода каждую пару объектов предоставляют на отдельной карточке. Испытуемый должен поместить каждую карточку в одну из нескольких упорядоченных категорий. Первая категория содержит наиболее схожие объекты, последняя – наиболее различные.

Чтобы в одной группе не оказалось слишком большого числа пар, экспериментатор может установить, сколько категорий следует использовать испытуемому или максимальное количество пар, помещаемых в одну группу.

Определив тип задания, экспериментатор должен продумать, как предоставлять его испытуемым. Существует два фактора, влияющие на оценки испытуемых при оценке пар стимулов. Первый фактор – порядок предоставления объектов в паре. Влияние этого фактора на оценку различия называется пространственным эффектом. Пространственные эффекты для объекта будут сбалансированы, если в одной половине пар он будет первым, а в другой – вторым.

Табл. 4. Порядок представления пар объектов

Порядок № 1	Порядок № 2	Порядок № 3
1 – 2	1 – 2	1 – 2
1 – 3	1 – 3	3 – 4
1 – 4	4 – 1	5 – 1
1 – 5	5 – 1	2 – 3
2 – 3	2 – 3	4 – 5
2 – 4	2 – 4	1 – 3
2 – 5	5 – 2	2 – 4
3 – 4	3 – 4	3 – 5
3 – 5	3 – 5	4 – 1
4 – 5	4 – 5	5 – 2

Второй фактор – порядок предоставления пар, включающий данный объект. Влияние этого фактора на оценку называется временным эффектом. Временные эффекты для данного объекта будут сбалансированы, если пары, включающие данный объект будут расположены в общем списке пар равномерно.

Рассмотрим пример сравнения 5 объектов. Различных пар из этих объектов можно составить $5 \cdot 4/2 = 10$, три различных порядка предоставления пар представлены в таблице.

В порядке № 1 не соблюдены пространственный и временной эффекты. Так, объект номер 1 в паре всегда стоит на первом месте и пары с ним расположены в начале списка. В порядке № 2 соблюден пространственный эффект, но не соблюден временной. В порядке № 3 соблюдены оба эффекта, все объекты расположены в этом списке равномерно.

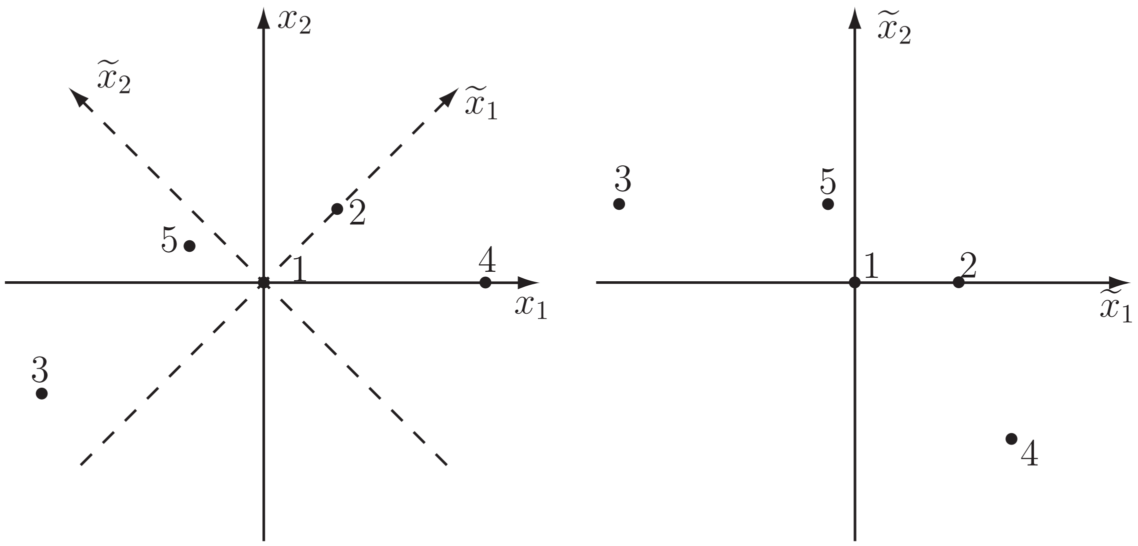
§ 3. Поворот. Ортогональные матрицы.

3.1. Поворот в пространстве признаков. Рассмотрим пример матрицы "объект–признак", где в качестве объектов выступает группа из пяти человек, а в качестве признаков – их вес (в кг.) и рост (в см.). Исходная матрица (X_0) и отцентрированная (X) имеют вид:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 80 & 180 \\ 90 & 190 \\ 50 & 165 \\ 110 & 180 \\ 70 & 185 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 10 \\ -30 & -15 \\ 30 & 0 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица X графически представлена на левом рисунке. Оси x_1 соответствует признак "вес" ("легкий – тяжелый"), оси x_2 – "рост" ("низкий – высокий").

Проведем новые оси $\widetilde{x}_1$ и $\widetilde{x}_2$ под углом 45°. Эти оси будут соответствовать уже другим признакам. Так, ось $\widetilde{x}_1$ можно охарактеризовать "худой – толстый", а ось $\widetilde{x}_2$ – как "маленький – крупный". Данные в новых осях после поворота их на 45° представлены на правом рисунке, этим данным будет соответствовать новая матрица $\widetilde{X}$ "объект–признак".



3.2. Матрица поворота в двумерном пространстве. Формула преобразования координат при повороте на угол α имеет следующий вид

$$\begin{cases} \widetilde{x}_1 = \quad x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha, \\ \widetilde{x}_2 = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha. \end{cases}$$

Эти соотношения можно записать в матричном виде

$$\widetilde{X} = XT, \tag{3.1}$$

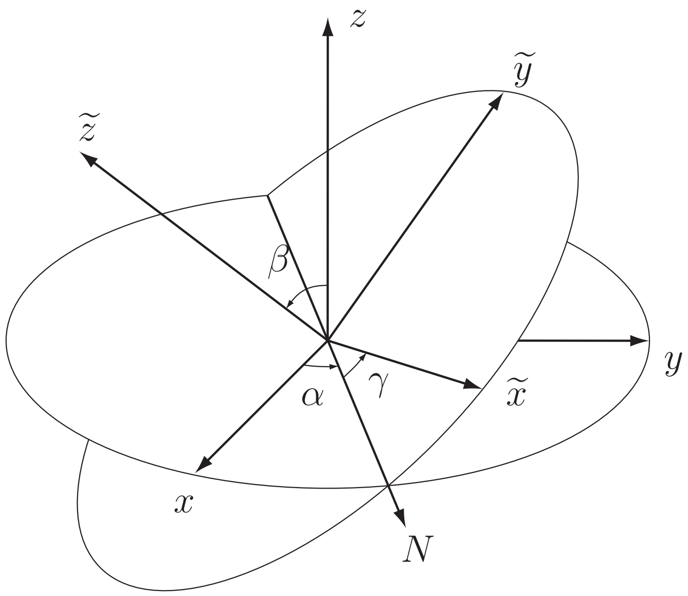
где T – матрица поворота

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Матрица $\widetilde{X}$ после поворота на угол $\alpha = 45^\circ$ будет иметь вид

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 14 & 0 \\ -32 & 11 \\ 21 & -21 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

3.3. Поворот в трехмерном пространстве. Поворот в трехмерном пространстве можно описать с помощью трех поворотов на так называемые углы Эйлера α, β и γ.



Первый поворот, называемый *прецессией* происходит вокруг оси z на угол α так, что ось x переходит в ось N (линия узлов).

Второй поворот, называемый *нутацией* происходит вокруг линии узлов на угол β так, что ось z переходит в ось $\widetilde{z}$.

Третий поворот, называемый *вращение* происходит вокруг оси $\widetilde{z}$ на угол γ так, что линия узлов переходит в ось $\widetilde{x}$.

Преобразование координат происходит по формуле (3.1), где матрица поворота имеет вид

$$T=\begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3.4. Понятие ортогональной матрицы. Квадратная матрица A называется ортогональной, если в результате умножения ее на транспонированную получается единичная матрица.

$$AA^T = A^TA = E,$$

или, что эквивалентно, обратная матрица к A совпадает с транспонированной

$$A^{-1} = A^T.$$

Можно показать, что матрицы поворота (3.2) и (3.3) являются ортогональными матрицами.

3.5. Поворот в n-мерном пространстве. В случае, когда объекты пространства восприятия имеют n признаков, у матрицы "объект–признак" X будет n столбцов. Поворот этой матрицы осуществляется по формуле (3.1). Матрица T поворота должна быть ортогональной. В результате поворота в пространстве восприятия получается новая матрица $\widetilde{X}$, которая будет также являться матрицей "объект–признак", строчки которой будут являться теми же объектами, что и у исходной матрицы, а столбцы характеризовать некоторые другие признаки.

§ 4. Собственные значения и собственные векторы

4.1. Определение собственных значений и векторов. Пусть $\mathbf{v}$ – вектор в пространстве R^n, а A – квадратная матрица размерности $n \times n$. Произведение $A\mathbf{v}$ также будет являться вектором в пространстве R^n. Таким образом, матрица A выполняет преобразование векторов в пространстве R^n. С одним из примеров таких преобразований – поворотом – мы познакомились в § 3.

Собственным вектором матрицы A называется такой ненулевой вектор $\mathbf{v}$, что для некоторого числа λ

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{4.1}$$

Входящее в это равенство число λ называется собственным значением матрицы A. Упрощенно говоря, собственный вектор – любой ненулевой вектор $\mathbf{v}$, который после преобразования умножением на матрицу A отображается в коллинеарный вектор $\lambda\mathbf{v}$, а соответствующее число λ называется собственным значением.

4.2. Нахождение собственных значений. Запишем (4.1) в другом виде:

$$(A - \lambda E)\mathbf{v} = 0. \tag{4.2}$$

У этого уравнения есть ненулевое решение в случае, если

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{4.3}$$

Это уравнение называется характеристическим и служит для нахождения собственных значений матрицы A. Левая часть этого уравнения представляет собой многочлен степени n относительно λ и имеет n решений (в общем случае возможны и комплексные корни).

Рассмотрим пример. Найдем собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, которые и будут двумя собственными значениями матрицы A.

4.3. Нахождение собственных векторов. Собственные векторы находятся из уравнения (4.2). Заметим, что решение будет не единственно, собственные векторы находятся с точностью до множителя. Обычно в качестве собственного вектора понимается вектор единичной длины. Найдем собственные векторы матрицы (4.4). Для $\lambda_1 = 3$ имеем систему

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{11} = v_{21} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = 1$ получим

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 1 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{12} = -v_{22} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

4.4. Приведение симметричной матрицы к диагональному виду. В случае, когда матрица A является симметричной, все собственные числа будут вещественными. Также, в случае симметричной матрицы любые два собственных вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, отвечающих различным собственным значениям λ_1 и λ_2 будут ортогональны. Если у симметричной матрицы все собственные числа $\lambda_1, \ldots \lambda_n$ различны, для нее мы имеем n собственных попарно ортогональных единичных векторов $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$. Составим матрицу V, столбцы которой являются собственными векторами $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$. Из условия попарной ортогональности единичных векторов следует

$$V^T V = E \qquad \Rightarrow \qquad V^T = V^{-1},$$

следовательно матрица V будет ортогональной.

Из (4.1) следует, что матрицу A можно представить в виде

$$A = V \Lambda V^T, \tag{4.5}$$

где Λ – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы A:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.5) можно записать также в виде $\Lambda = V^T A V$, поэтому оно называется ортогональным преобразованием матрицы A или приведением матрицы A к диагональному виду.

4.5. Нахождение матрицы X по матрице Δ^*. Опишем алгоритм нахождения матрицы X "объект–признак" по матрице Δ^* скалярных произведений. Заметим, что из формулы (2.2) следует связь этих матриц

$$\Delta^* = XX^T. \tag{4.7}$$

Так как Δ^* – симметричная матрица, то для нее применимо разложение (4.5): $\Delta^* = V\Lambda V^T$. Пусть диагональная матрица

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

составлена из квадратных корней собственных чисел матрицы Δ^*. Обычно числа на главной диагонали располагают в порядке невозрастания.

Заметим, что $\Lambda = SS = SS^T$. Поэтому

$$\Delta^* = V(SS^T)V^T = (VS)(VS)^T.$$

Поэтому решением уравнения (4.7), то есть искомой матрицей "объект–признак" может быть матрица

$$X = VS, \tag{4.9}$$

где S имеет вид (4.8), а каждый столбец матрицы

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}$$

является собственным вектором матрицы Δ^*.

Заметим, что решение этой задачи не единственно. Любая матрица матрица $\widetilde{X}$, полученная из X в результате ортогонального преобразования, например поворота $\widetilde{X} = XT = VST$ также будет решением уравнения (4.7). Действительно

$$\widetilde{X}\widetilde{X}^T = (VST)(VST)^T = VS(TT^T)S^TV^T = VSS^TV^T = \Delta^*$$

§ 5. Метрический метод Торгерсона

5.1. Нахождение матрицы Δ^* по матрице Δ (основная теорема Торгерсона). Напомним, что элементы матрицы Δ различия связаны с элементами матрицы X "объект–признак" формулой (2.1). Элементы матрицы Δ^* также находятся по матрице "объект–признак" (формула (2.2)). Рассмотрим случай, когда матрица X неизвестна и требуется найти связь между матрицами Δ и Δ^*.

Теорема Торгерсона: Элементы матрицы Δ^* связаны с элементами матрицы Δ формулой

$$\delta^*_{ij} = -\frac{1}{2}(\delta^2_{ij} - \delta^2_{i\cdot} - \delta^2_{\cdot j} + \delta^2_{\cdot\cdot}), \tag{5.1}$$

где

$$\delta_{i\cdot}^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\delta_{ij}^2, \quad \delta_{\cdot j}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_{ij}^2, \quad \delta_{\cdot\cdot}^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\delta_{\cdot j}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\delta_{i\cdot}^2.$$

5.2. Доказательство основной теоремы. Для удобства доказательства рассмотрим случай, когда данные матрицы X являются шкалированными, то есть

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ik} = \sum_{j=1}^{m} x_{jk} = 0 \qquad \text{для всех } k \tag{5.2}$$

Использовав формулу (2.1), найдем

$$\delta_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n}(x_{ik} - x_{jk})^2 = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2 + \sum_{k=1}^{n} x_{jk}^2 - 2\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{jk} \tag{5.3}$$

Просуммировав по индексу j, получим

$$\delta_{i\cdot}^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\delta_{ij}^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2 + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{jk}^2 - \frac{2}{m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}x_{jk} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{jk}^2\right) - \frac{2}{m}\sum_{k=1}^{n} x_{ik}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{jk}\right).$$

Последняя скобка равна нулю вследствие (5.2), поэтому

$$\delta_{i\cdot}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}^2 + \sum_{k=1}^{n} x_{\cdot k}^2, \qquad x_{\cdot k}^2 = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} x_{jk}^2. \tag{5.4}$$

Аналогично получим

$$\delta_{\cdot j}^2 = \sum_{k=1}^{n} x_{jk}^2 + \sum_{k=1}^{n} x_{\cdot k}^2. \tag{5.5}$$

Просуммировав (5.4) по индексу i, получим

$$\delta_{\cdot\cdot}^2 = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_{ik}^2\right) + \sum_{k=1}^{n} x_{\cdot k}^2\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1\right) = 2\sum_{k=1}^{n} x_{\cdot k}^2. \tag{5.6}$$

Подставив (5.3)–(5.6) в (5.1), получим равенство

$$\delta^*_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} x_{jk},$$

совпадающее с (2.2), следовательно, теорема верна.

5.3. Метрические метод многомерного шкалирования (метод Торгерсона). Задачей метода многомерного шкалирования является нахождение матрицы X "объект–признак" по матрице Δ различий. Напомним, что саму матрицу Δ находят способом, описанном в разделе 2.4. Основное предположение, сделанное Торгерсоном, заключается в том, что элементы δ_{ij} связаны с элементами x_{ik} формулой (2.1) расстояния в метрическом пространстве.

После получения матрицы Δ, дальнейший алгоритм действий таков.

1. По матрице Δ находят матрицу Δ^*, используя теорему Торгерсона, приведенную в разделе 5.1.

2. По матрице Δ^* находят матрицу X, используя формулу (4.9) из раздела 4.5.

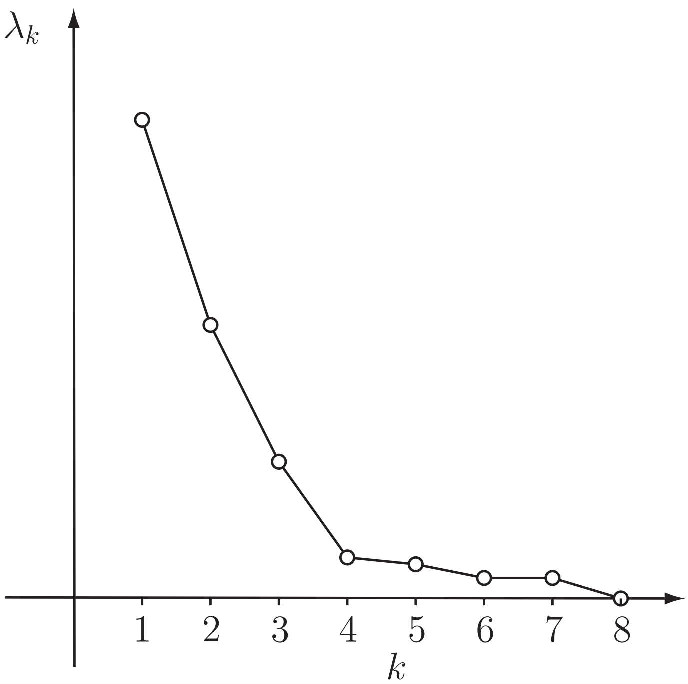
3. По полученной матрице X пытаются интерпретировать признаки, соответствующие столбцам этой матрицы. Если это сделать не удается, находят новую матрицу $\widetilde{X}$ путем поворота (3.1). Матрицу поворота выбирают из условия интерпретируемости характеристик, соответствующим столбцам полученной матрицы $\widetilde{X}$.

5.4. Выбор размерности n пространства восприятия. В метрическом методе многомерного шкалирования остался невыясненным вопрос о размерности n пространства восприятия $\mathbb{R}^n$ – количестве признаков, характеризующих каждый объект. Для нахождения этого числа обратимся к собственным значениям λ_k. Они связаны элементами матрицы X соотношением

$$\lambda_k = \sum_{i=1}^{m} x_{ik}^2,$$

то есть равны сумме квадратов значений по этому признаку.

Чем больше число λ_k, тем более "весомым" является признак k. Поэтому из всех m возможных собственных значений матрицы Δ^* следует отобрать лишь n наибольших. Это основная идея метода главных компонент, рассмотреного в следующем параграфе.



Одним из методов определения n состоит в следующем. Делается чертеж, где по оси x откладывается порядковый номер k, а по оси y – собственные значения λ_k, отсортированные в порядке убывания (см.рисунок). Полученная линия должна сгладиться на $k = n + 1$ координате (в этой точке должен наблюдаться излом). Для случая, приведенного на рисунке, излом происходит в точке $k = 4$, поэтому правильное число признаков $n = k - 1 = 3$.

§ 6. Метод главных компонент

6.1. Основная идея метода. Метод главных компонент заключается в уменьшении количества исходных данных матрицы X "объект–признак", потеряв при этом наименьшее количество информации. Уменьшение данных происходит путем сокращения числа признаков. Если первоначальная матрица X содержала n столбцов, то полученная в результате применения метода главных компонент матрица Y будет содержать $r < n$ столбцов.

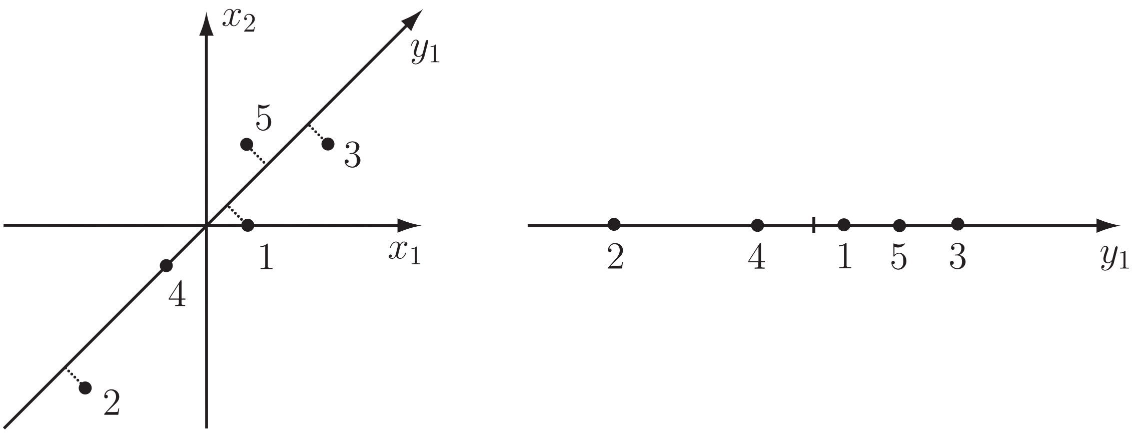
Данные, содержащиеся в матрице X обычно содержат нужную нам информацию, но они могут быть избыточными. Кроме того, данные могут содержать в себе нежелательную составляющую, называемую шумом. Природа этого шума может быть различной. Что считать шумом, а что – информацией, всегда решается с учетом поставленных целей и методов.

В результате применения метода главных компонент, мы переходим от исходного пространства восприятия с большим количеством признаков к новому представлению, размерность которого значительно меньше. Часто удается упростить данные на порядки: от 1000 признаков перейти всего к двум. При этом ничего не выбрасывается – все признаки учитываются. В то же время несущественная для сути дела часть данных отделяется, превращается в шум. Найденные главные компоненты и дают искомые скрытые признаки, управляющие устройством данных.

6.2. Ортогональное проектирование на подпространство. Рассмотрим пример. Исходная матрица X имеет два столбца:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -4 \\ 3 & 2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Графически данные представлены на левом рисунке. Видно, что они расположены близко к прямой y_1. Поэтому в данном случае можно уменьшить число данных, оставив вместо двух признаков, соответствующих осям x_1 и x_2 один признак, соответствующий оси y_1. Для этого все точки проектируются на эту прямую. Предполагается, что данные должны располагаться на этой прямой, но в результате небольших ошибок и погрешностей они переместились с правильного места. Все такие отклонения от новой оси можно считать шумом, т.е. ненужной нам информацией. Измененные данные графически можно расположить на прямой (правый рисунок).



В случае многомерного пространства процесс переноса данных из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}_r$ называют проекцией на гиперплоскость.

Новая матрица Y связана с X соотношением

$$Y = XP, \tag{6.1}$$

где P – матрица проектирования. Эта формула похожа на формулу (3.1) преобразования координат при повороте, отличие заключается лишь в том, что матрица T поворота является квадратной $(n \times n)$, а матрица P проектирования имеет размерность $n \times r$.

Эта матрица обладает свойством $P^T P = E$, но она не будет являться ортогональной, так как она не квадратная и $PP^T \neq E$.

Для случая проектирования из плоскости на прямую, матрица P имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix},$$

то есть представляет собой первый столбец матрицы T поворота (формула (3.2)).

6.3. Сингулярное разложение. Пусть A – произвольная матрица размерности $m \times n$. Она может быть представлена в виде произведения трех матриц (или так называемого сингулярного разложения матрицы A)

$$A = USV^T,$$

где U и V – ортогональные матрицы размерностей $m \times m$ и $n \times n$, составленные из столбцов собственных векторов матриц AA^T и $A^T A$ соответственно. Матрица S размерности $m \times n$ – прямоугольная диагональная матрица, диагональ которой содержит числа $\sqrt{\lambda_k}$ – квадратные корни из собственных значений матрицы AA^T или $A^T A$. Обычно числа на диагонали S располагают в порядке невозрастания. Матрицы

AA^T и A^TA являются различными, но они обладают свойством, что их ненулевые собственные значения совпадают.

Рассмотрим пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа 9, 5 и 0. Соответствующие им собственные векторы образуют столбцы матрицы

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица

$$A^TA = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа 9 и 5. Соответствующие им собственные векторы образуют столбцы матрицы

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица будет иметь вид

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, что матрицы U и V являются ортогональными и $USV^T = A$.

6.4. Описание метода главных компонент. Суть метода главных компонент заключается в поиске разложения

$$X = YP^T + F,$$

где Y называется матрицей счетов (она содержит главные компоненты матрицы X данных), P – матрица нагрузок (фактически являющейся матрицей проектирования), F – матрица остатков (содержит шум). Матрицы X и F имеют размерность $m \times n$, матрица Y – $m \times r$, матрица P – $n \times r$.

Столбцы матрицы Y содержат числовые значения новых признаков, а столбцы матрицы P нагрузок представляют собой координаты единичных векторов, направленных по новым осям. Важным свойством метода главных компонент является следующее: если число новых признаков увеличивается, то матрицы Y и P не пересчитываются, к ним просто добавляются новые столбцы, соответствующие добавляемым признакам.

Для нахождения матрицы P используется сингулярное разложением матрицы X. Вначале требуется определить число r главных компонент. Это можно сделать по методу описанному в разделе 5.4 для собственных чисел λ_k матрицы XX^T или X^TX. Затем из первых r столбцов матрицы V формируется матрица P. После того как матрица P найдена, нахождение Y по X происходит по формуле (6.1). Матрицу ошибок находят по формуле $F = X - YP^T$.

Полученные таким образом матрицы P и Y не будут единственным решением поставленной задачи. Ту же самую матрицу ошибок можно получить, если взять в качестве матрицы нагрузок $\widetilde{P} = PT$, а в качестве матрицы счетов $\widetilde{Y} = YT$, где T – ортогональная матрица поворота.

Действительно,

$$\widetilde{Y}\widetilde{P}^T = (YT)(PT)^T = Y(TT^T)P^T = YP^T.$$

§ 7. Дифференциальные уравнения. Модель роста численности популяции.

7.1. Основные сведения о дифференциальных уравнениях. Пусть состояние некоторой системы описывается характеристикой x. При изменении времени t эта характеристика может меняться, следовательно, она будет представлять собой некоторую функцию $x(t)$. Если в системе есть причинно-следственная связь, то можно предсказать, чему будет равна характеристика при увеличении времени на малое значение $t + \Delta t$:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + A(x, t) \tag{7.1}$$

По определению производной функции

$$x' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

поэтому для малых значений Δt получим $x(t + \Delta t) \approx x(t) + x'\Delta t$. Подставив это соотношение в (7.1), получим соотношение

$$x' = \frac{A(x, t)}{\Delta t} = f(x, t),$$

представляющее собой дифференциальное уравнение.

Дифференциальное уравнение первого порядка – соотношение, связывающее независимую переменную, некоторую неизвестную функцию и ее производную. Решением дифференциального уравнения называется функция, которая обращает данное соотношение в тождество.

Физическим смыслом производной функции описывающей изменение некоторой характеристики с течением времени является скорость изменения значения этой характеристики. Поэтому из дифференциального уравнения можно определить как с течением времени будет меняться значение характеристики, описывающей некоторый процесс.

7.2. Модель роста численности в случае неограниченности ресурсов. Рассмотрим модель роста численности популяции. Пусть $x(t)$ – функция, описывающая изменение численности популяции с течением времени.

Будем считать, что прирост численности пропорционален численности самой популяции. Так как прирост численности есть производная $x'(t)$, то данное утверждение можно записать в виде дифференциального уравнения

$$x' = kx,$$

где k – некоторый коэффициент пропорциональности, называемый удельной скоростью роста.

Также для полного описания физического процесса необходимо задать начальное условие, пусть в начальный момент $t = 0$ численность популяции $x(0) = x_0$. Совокупность дифференциального уравнения вместе с начальным условием называется задачей Коши.

Решим это уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = kdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int kdt \quad \Rightarrow$$

$$\ln x = kt + \ln C \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{kt}.$$

Из начального условия найдем постоянную $C = x_0$ и решением задачи Коши будет функция $x = x_0 e^{kt}$. Таким образом, рост численности популяции происходит по экспоненциальному закону.

Заметим, что по этому же закону происходит рост суммы вклада в банке, рост доходов предприятия и т.п.

7.3. Модель роста численности в случае ограниченности ресурсов. Предыдущее уравнение и его решение получены в предположении, что ресурсы питания неограничены, что привело к неограниченному росту численности популяции. Более точное решение можно получить, если предположить что удельная скорость роста k является не постоянной величиной, а зависит от численности x популяции по линейному закону:

$$k(x) = k_0 \left(1 - \frac{x}{b}\right).$$

Число b называется емкостью среды, при численности популяции $x = b$ скорость роста популяции становится равной нулю. Таким образом, дифференциальное уравнение роста численности популяции имеет вид

$$x' = k_0 \left(1 - \frac{x}{b}\right) x.$$

Решим это уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = k_0 \left(1 - \frac{x}{b}\right) x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{\left(1 - \frac{x}{b}\right) x} = k_0 dt \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x}\right) dx = k_0 dt \quad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b-x}\right) dx = \int k_0 dt \quad \Rightarrow$$

$$\ln \frac{x}{b-x} = k_0 t + \ln C \quad \Rightarrow \quad x = b\frac{Ce^{k_0 t}}{1 + Ce^{k_0 t}}.$$

Постоянную C найдем из начального условия$x(0) = x_0$.

$$C = \frac{x_0}{b - x_0} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{bx_0 e^{k_0 t}}{b + x_0(e^{k_0 t} - 1)}.$$

При $t \to \infty$ численность популяции $x(t) \to b$.

7.4. Модель роста численности при наличии миграции. Предположим теперь, что изменение численности популяции происходит не только за счет прироста, но и за счет миграции, то есть

$$x' = kx - m,$$

где m – численность особей, покидающих популяцию (при $m < 0$ – приходящих извне). Эта величина может быть функцией от времени, но мы рассмотрим лишь случай, когда m является постоянной.

Решим полученное уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = kx - m \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x - m/k} = kdt \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x - m/k} = \int kdt \quad \Rightarrow$$

$$\ln\left(x - \frac{m}{k}\right) = kt + \ln C \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{kt} + \frac{m}{k}.$$

Из начального условия $x(0) = x_0$ находится постоянная $C = x_0 - m/k$ и функция роста популяции приобретает вид

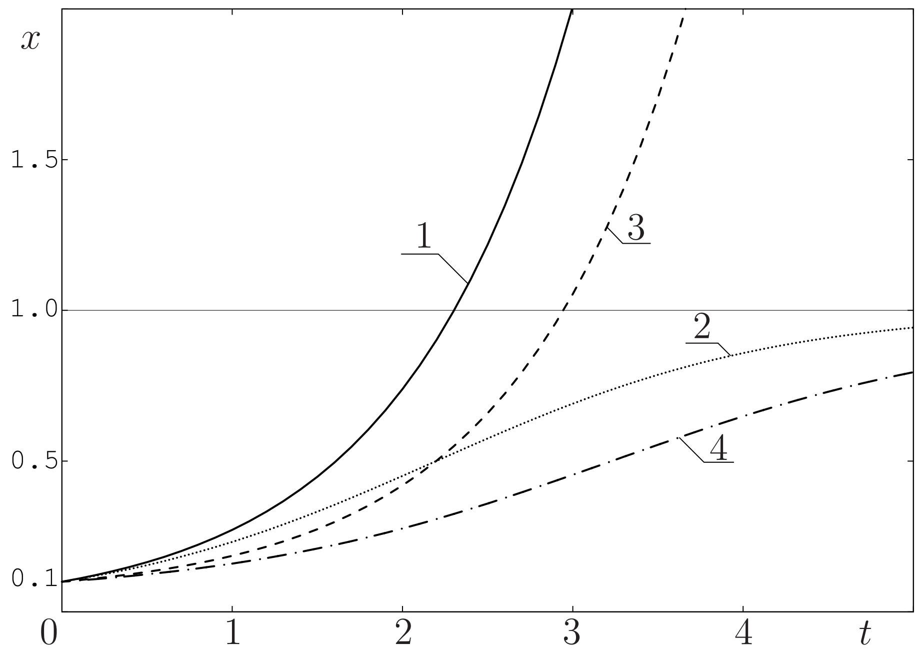
$$x = \left(x_0 - \frac{m}{k}\right) e^{kt} + \frac{m}{k}.$$

Также можно рассмотреть и другие модели, например модель роста численности популяции при наличии ограниченности ресурсов и миграции и т.п. Так, в случае наличия ограниченности ресурсов и наличия миграции уравнение примет вид

$$x' = k\left(1 - \frac{x}{b}\right) x - m, \tag{7.2}$$

где k – удельная скорость роста, b – емкость среды, m – коэффициент миграции.

На рис. приведены графики роста численности популяции для четырех моделей: 1 – в случае неограниченности ресурсов ($k = 1$), 2 – в случае ограниченности ($k_0 = 1$, $b = 1$), 3 и 4 – графики в случае наличия миграции ($m = 0.05$). В начальный момент времени ($t = 0$) численность популяции равнялась $x(0) = 0.1$.



§ 8. Системы дифференциальных уравнений. Модель “хищник–жертва”

8.1. Основные сведения о системах дифференциальных уравнений. Пусть состояние некоторой системы описывается несколькими характеристиками x_1, x_2, $\ldots x_n$. При изменении времени t эти характеристики могут меняться, следовательно, она будут представлять собой некоторые функции $x_i(t)$. Если в системе есть причинно-следственная связь, то можно предсказать, чему будет равны характеристики при увеличении времени на малое значение $t + \Delta t$:

$$x_i(t + \Delta t) = x_i(t) + A(x_1, x_2, \ldots, x_n, t).$$

Также, как и для одного дифференциального уравнения, это означает что все характеристики удовлетворяют совокупности соотношений, включающих в себя искомые функции, их производные и время. Эти соотношения назовем *системой дифференциальных уравнений*:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \\ \ldots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t). \end{cases}$$

Решением системы дифференциальных уравнений называется набор функций x_1, x_2, $\ldots x_n$, которые обращает каждое уравнение системы в тождество.

Система дифференциальных уравнений называется *автономной*, если независимая переменная (в нашем случае такой переменной является время t) не входит явным образом в функции, задающие систему. Автономная система в нормальном виде имеет вид:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ x_n' = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \tag{8.1}$$

Автономная система моделирует автономные процессы, т.е. процесс, не подверженные внешним влияниям. Все эти процессы полностью определяются начальными значениями переменных состояния x_1, x_2, $\ldots x_n$ и не зависят от выбора начального значения аргумента t.

Для автономных систем существует понятие стационарной точки. *Стационарной точкой* автономной системы дифференциальных уравнений называется совокупность таких начальных значений x_{10}, x_{20},

$\ldots x_{n0}$, при которых все правые части системы (8.1) обращаются в нули.

Можно также ввести понятие *фазового пространства* —- пространства размера n, представляющего собой множество всех состояний системы, так, что каждому возможному состоянию автономной системы соответствует точка фазового пространства. При изменении времени состояние системы меняется и в фазовом пространстве соответствующая точка движется по так называемой *фазовой траектории*. В случае двух переменных фазовое пространство называется *фазовой плоскостью*.

8.2. Понятие устойчивости. Виды стационарных точек.

В математике, решение дифференциального уравнения или системы называется *устойчивым*, если поведение решений с близкими начальными условиями "не сильно" отличается от поведения исходного решения. Слова "не сильно" можно формализовать по-разному, получая разные формальные определения устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическую устойчивость и т.д. Обычно рассматривается задача об устойчивости решения в стационарной точке, поскольку задача об устойчивости произвольной траектории сводится к данной путем замены неизвестной функции.

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y, \\ y' = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{8.2}$$

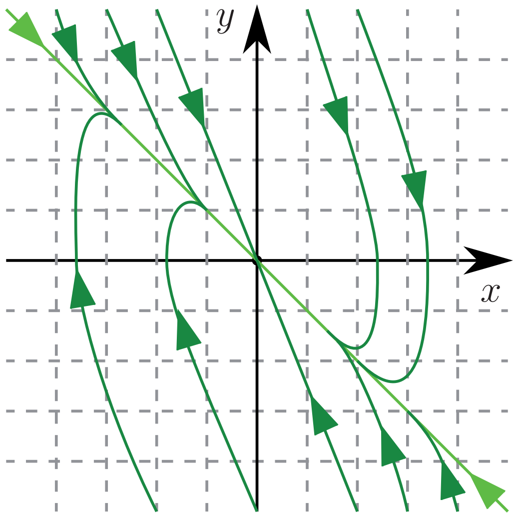
и соответствующую ей матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

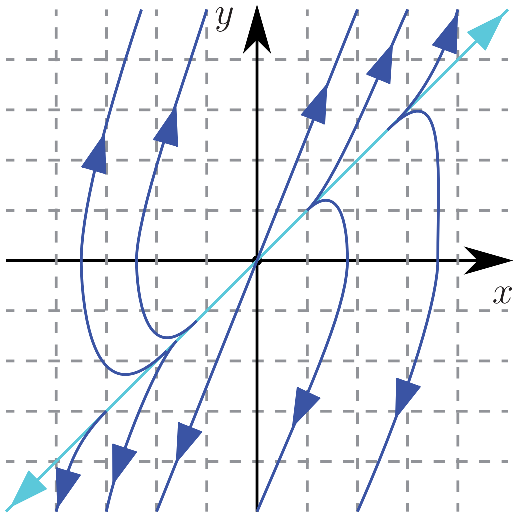
Эта система имеет одну стационарную точку $x = y = 0$. Пусть λ_1

и λ_2 – два собственных значения матрицы A. В зависимости от этих значений классифицируют следующие виды стационарных точек:

1. λ_1 и λ_2 – вещественные отрицательные ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$). Точка называется *устойчивый узел*. Траектории в фазовой плоскости представляют собой параболы, движение точки в этой плоскости происходит по направлению к стационарной точке.

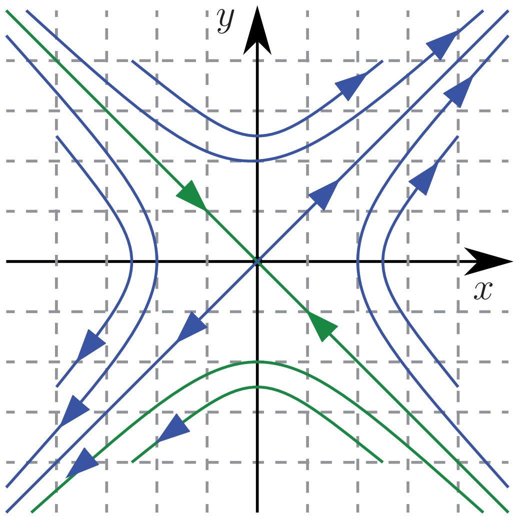


2. λ_1 и λ_2 – вещественные положительные ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$). Точка называется *неустойчивый узел*. Траектории в фазовой плоскости представляют собой параболы, движение точки в этой плоскости происходит по направлению от стационарной точки.

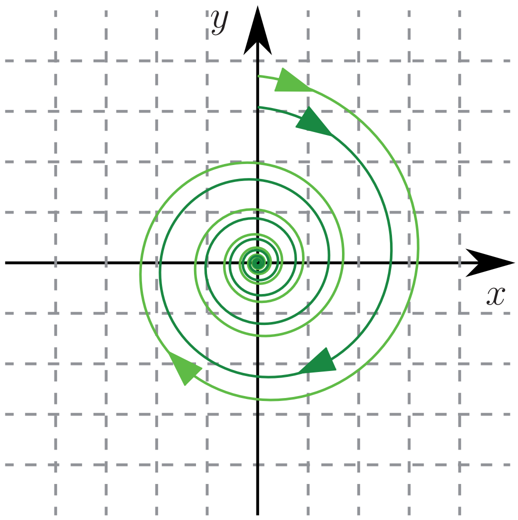


3. λ_1 и λ_2 – вещественные числа разных знаков ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$). Точ-

ка называется *седло*. Траектории в фазовой плоскости представляют собой гиперболы, движение точки в этой плоскости происходит по направлению к одной из асимптот гиперболы. Стационарная точка является неустойчивой.

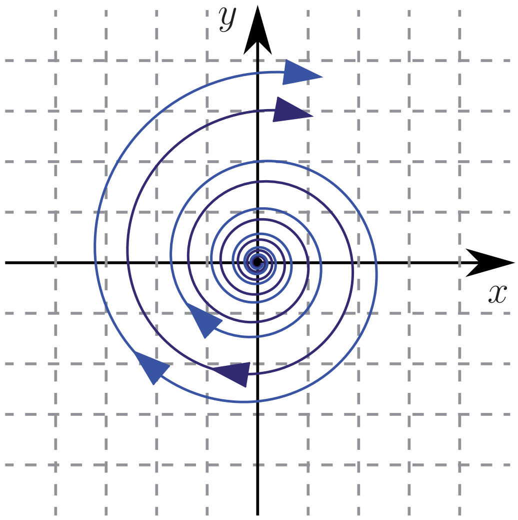


4. λ_1 и λ_2 – комплексные числа с отрицательной действительной частью ($\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha < 0$). Точка называется *устойчивый фокус*. Траектории в фазовой плоскости представляют собой логарифмические спирали, движение точки в этой плоскости происходит по направлению к стационарной точке.

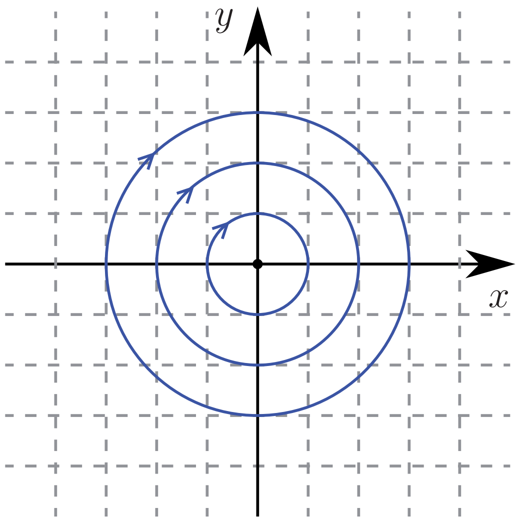


5. λ_1 и λ_2 – комплексные числа с положительной действительной частью ($\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\alpha > 0$). Точка называется *неустой-*

чивый фокус. Траектории в фазовой плоскости представляют собой логарифмические спирали, движение точки в этой плоскости происходит по направлению от стационарной точки.



6. λ_1 и λ_2 – комплексные числа с нулевой действительной частью ($\lambda_1 = i\beta$, $\lambda_2 = -i\beta$). Точка называется *центр*. Траектории в фазовой плоскости представляют собой эллипсы, движение точки в этой плоскости происходит по или против часовой стрелки вокруг стационарной точки. Стационарная точка является устойчивой.



8.3. Описание модели "хищник–жертва". В предыдущем параграфе мы рассматривали модель роста численности популяции, состоящей из одного вида. Рассмотрим теперь задачу развития экосистемы, состоящей из двух видов. Первый вид назовем “хищниками”, основным средством существования которого является охота на второй вид, который мы назовем “жертвами”. Рассмотрим модель изменения численности популяции этих двух видов с течением времени. Пусть $x(t)$ – функция, описывающая изменение с течением времени численности “жертв”, $y(t)$ – численности “хищников”.

Будем считать, что прирост численности “жертв” в отсутствии “хищников” пропорционален численности самой популяции ($x' = kx$). Также, убыль численности “хищников” в отсутствие “жертв” также пропорционален их численности ($y' = -\ell y$). Убыль численности “жертв” и рост численности “хищников” пропорционален числу встреч “хищников” и “жертв”, которое, в свою очередь пропорциональна произведению xy. Таким образом, развитие системы “хищник–жертва” описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = kx - axy, \\ y' = -\ell y + bxy, \end{cases} \tag{8.4}$$

где k, ℓ, a, b – некоторые положительные постоянные.

Для полного описания этой системы необходимо задать начальные условие, пусть в начальный момент $t = 0$ численность популяций

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Совокупность системы дифференциальных уравнений вместе с начальными условиям также называется задачей Коши для системы дифференциальных уравнений.

Заметим, что наша система (8.4) является автономной. Найдем ее стационарные точки:

$$\begin{cases} kx - axy = 0, \\ -\ell y + bxy = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{\ell}{b}, \\ y = \frac{k}{a}, \end{cases}$$

8.4. Исследование стационарной точки модели "хищник–жертва". Система (8.4) является нелинейной, содержащей произведение xy. Для исследования стационарных точек на устойчивость необходимо вначале линеаризовать систему.

Исследуем вначале точку $x = y = 0$. Вблизи этой точки x и y являются малыми, а их произведение – xy является величиной второго порядка малости, поэтому ей в системе (8.4) можно пренебречь. В результате получим линейную систему

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = -\ell y, \end{cases}$$

которой соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -\ell \end{pmatrix}$$

Собственные числа этой матрицы легко находятся $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = -\ell$. Так как эти числа являются вещественными и различных знаков, то делаем вывод, что наша стационарная точка $(0,0)$ является седлом.

Рассмотрим теперь вторую точку $x = \frac{\ell}{b}$, $y = \frac{k}{a}$. Вблизи этой точки x и y являются не являются малыми, поэтому произведением xy пренебрегать нельзя. Введем новые переменные $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$: $x = \widetilde{x} + \frac{\ell}{b}$, $y = \widetilde{y} + \frac{k}{a}$. Подставим полученные выражения в (8.4):

$$\begin{cases} \widetilde{x}' = -\frac{a\ell}{b}\widetilde{y} - a\widetilde{x}\widetilde{y}, \\ \widetilde{y}' = \frac{bk}{a}\widetilde{x} + b\widetilde{x}\widetilde{y}, \end{cases}$$

Произведение $\widetilde{x}\widetilde{y}$ является величиной второго порядка малости, поэтому линеаризованная система примет вид

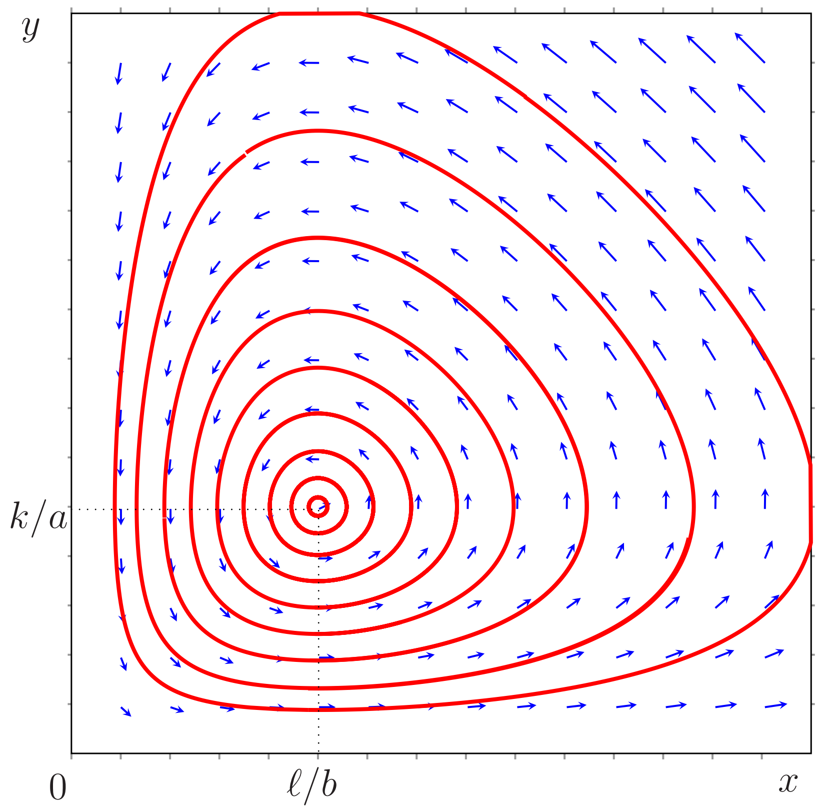
$$\begin{cases} \widetilde{x}' = -\frac{a\ell}{b}\widetilde{y}, \\ \widetilde{y}' = \frac{bk}{a}\widetilde{x}. \end{cases}$$

Этой системе соответствует матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a\ell}{b} \\ \frac{bk}{a} & 0 \end{pmatrix},$$

Собственные числа которой $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{k\ell}i$. Так как эти числа являются комплексными с нулевой вещественной частью, наша стационарная точка $(\frac{\ell}{b}, \frac{k}{a})$ является центром.

Траектории в фазовой плоскости решения системы (8.4) изображены на рисунке.



8.5. Модели конкуренции и сотрудничества. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида (8.4), но записанную в более общем виде

$$\begin{cases} x' = k_x\left(1 - \frac{x}{b_x}\right)x + a_x xy - m_x, \\ y' = k_y\left(1 - \frac{y}{b_y}\right)y + a_y xy - m_y, \end{cases}$$

где k_x, k_y, b_x, b_y, m_x, m_y, a_x, a_y – постоянные величины. При $a_x = a_y = 0$ каждое из этих уравнений можно решать отдельно, они представляют собой обычные логистические уравнения (7.2) с таким же смыслом входящих в них постоянных коэффициентов.

В случае, когда a_x и a_y не равны нулю одновременно, величины x и y будут влиять друг на друга. В зависимости от знаков величин a_x и a_y различают различные модели:

Знак a_x	Знак a_y	Модель взаимодействия	Описание модели
$+$	$+$	Симбиоз	Оба вида благоприятно влияют друг на друга
$+$	-	Хищничество	Один вид угнетает другой вид, получая от этого пользу
-	-	Конкуренция	Оба вида соперничают друг с другом
$+$	0	Комменсализм	Один из видов получает пользу от сотрудничества, не принося другому виду ни вреда, ни пользы
-	0	Аменсализм	Один вид угнетается другим видом, не принося другому виду ни вреда, ни пользы
0	0	Нейтрализм	Ни один вид не влияет на другой

Литература

Основная литература

1. *Дейвисон М.* Многомерное шкалирование. М.: Финансы и статистика, 1988.
2. *Гуц А.К., Фролова Ю.В.* Математические методы в социологии. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
3. *Плотинский Ю.М.* Модели социальных процессов. М.: Логос, 2001.

Дополнительная литература

4. *Ахтямов А.М.* Математика для социологов и экономистов. М.: Физматлит, 2004.
5. *Толстова Ю.Н.* Основы многомерного шкалирования. М.: Изд-во КДУ, 2006.
6. *Робертс Ф.С.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М.: Наука, 1986.